## 基础课17 导数与函数的单调性

### 课时评价·提能

#### 基础巩固练

1. 已知函数，则函数的单调递减区间为（ C ）.

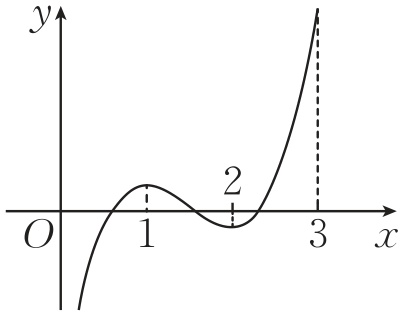
A. B. C. , D. ,

[解析]由题意知，定义域为，

得，令，即,解得，

故函数 的单调递减区间为,.故选.

2. （改编）已知定义在上的函数的图象如图所示，则不等式的解集为（ D ）.



A. B. C. D.

[解析]当 时，单调递增，则，

此时，所以，满足题意；

当 时，单调递减，则，

此时，所以，满足题意；

当 时，单调递增，则，

此时，所以，不满足题意；

当 时，易得，不满足题意；

当 时，易得，则，不满足题意.

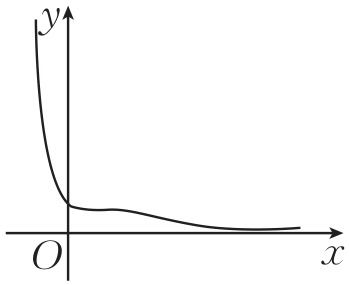
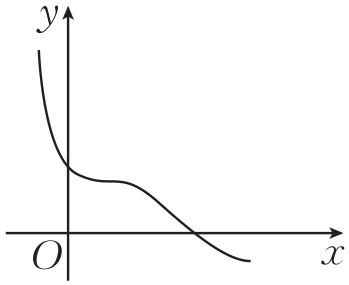
综上，或，即不等式 的解集为.故选.

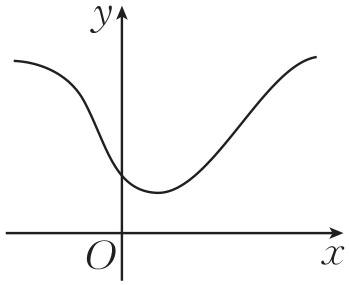
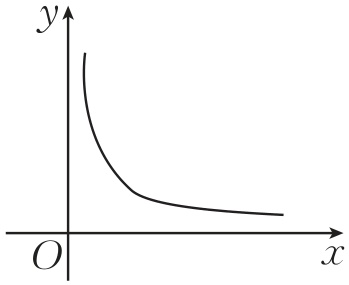
3. 已知函数，在区间上任取两个不相等的实数，，若不等式恒成立，则实数的取值范围是（ C ）.

A. B. C. D.

[解析]由 可知 在 上单调递增，所以 在 上恒成立，即 在 上恒成立，故，所以.故选.

4. [2024·安阳模拟]函数的大致图象为（ A ）.

A.  B. 

C.  D. 

[解析] 恒成立，

所以函数 在定义域 上单调递减，且对任意的，都有,，

所以对任意的，都有，所以结合选项可知 满足.故选.

5. 若函数在上可导，且满足恒成立，,为常数，且,则下列不等式一定成立的是（ A ）.

A. B. C. D.

[解析]令，则 恒成立，故 在 上单调递增.

，，即.故选.

6. 已知函数，则“”是“函数在上单调递减”的（ A ）.

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

[解析]若函数 在 上单调递减，

则 在 上恒成立，

所以 在 上恒成立，

设函数，则，

所以 在 上恒成立，所以 在 上单调递增，

所以，所以.

“”是“”的充分不必要条件，

即“”是“函数 在 上单调递减”的充分不必要条件.

故选.

7. 若函数在其定义域的一个子区间内不是单调函数，则实数的取值范围是（ B ）.

A. B. , C. D. ，

[解析]因为函数的定义域为，所以，即，

，令，得 或（舍去），

因为函数在区间 内不是单调函数，

所以，即，解得.

综上，.故选.

8. 已知，，，则（ D ）.

A. B. C. D.

[解析]构造函数，因为，

所以当 时，，所以函数 在 上单调递增.

因为，所以，即，所以.故选.

#### 综合提升练

9. （多选题）意大利画家列奥纳多·达·芬奇曾提出一个问题：固定项链的两端，使其在重力的作用下自然下垂，项链所形成的曲线是什么？这就是著名的“悬链线问题”，后人给出了悬链线的函数表达式为，其中为悬链线系数，称为双曲余弦函数，其函数表达式为，同时，双曲正弦函数的函数表达式为，则（ AC ）.

A.

B.

C. 是奇函数

D. 当直线与函数和的图象共有3个交点时，

[解析]，正确；

，错误；

的定义域为，且，

是奇函数，正确；

的导函数为，令，则，

又 为增函数， 当 时，，当 时，，

在 上单调递减，在 上单调递增，

故，

在 上单调递增，且当 时， ，

当 时， ，

当 与 和 共有3个交点时，，错误.故选.

10. （多选题）设，若函数在上单调递增，则的值可能是（ CD ）.

A. B. C. D.

[解析]因为函数，所以，

若函数 在 上单调递增，

则 在 上恒成立，

，

则 在 上恒成立，

因为，所以，所以，

因此 在 上恒成立，

因为，则，所以 即 所以

解得，

即 的取值范围为,，和 符合.故选.

11. 已知函数，其中是自然对数的底数.若，则实数的取值范围是,.

[解析]因为，且 的定义域为，所以 为奇函数.因为（当且仅当 时,等号成立），所以 在 上单调递增，因为 可化为，即，所以,，解得，故实数 的取值范围是,.

12. （双空题）已知函数.若在区间上单调递增，则实数的取值范围是,；若在区间上存在单调递增区间，则实数的取值范围是,.

[解析]，,

，

在 上单调递增，在 上恒成立，

在 上恒成立，在 上恒成立，

，，

，则 的取值范围是,.

在 上存在单调递增区间，在 上有解，

即 在 上有解，，

又，,即实数 的取值范围是,.

#### 应用情境练

13. 某莲藕种植塘每年的固定成本是1万元，每年最大规模的种植量是8万千克，每种植1千克莲藕的成本为0.5元.种植万千克莲藕的销售额（单位：万元）函数是（是常数），若种植2万千克，利润是2.5万元，则要使利润最大，每年需种植莲藕6万千克.

[解析]设种植 万千克莲藕的利润（单位：万元）为,则，，即，，

当 时，，解得，

故，，

，

当 时，，当 时，，

所以函数 在 上单调递增，在 上单调递减，

所以当 时，利润最大.

14. 已知函数.

（1）求在定义域内的单调区间.

（2）若,，求证：.

[解析]（1），.

当 时，，函数 在 上单调递增.

当 时，令，可得.

则函数 在 上单调递减，在 上单调递增.

综上，当 时,的单调递增区间为，无单调递减区间;

当 时，的单调递增区间为,单调递减区间为.

（2），,，即.

要证明，只需证明.

令，

则，

在 上单调递减，而，

，即，.

#### 创新拓展练

15. 设是函数定义域的一个子集，若存在，使得在上单调递增，在上单调递减，则称为上的单峰函数，为峰点.若为上的单峰函数，则实数的取值范围为  .

[解析]由，得，

令，，则,,

当 时，,当 时，,故 在 上单调递减，在 上单调递增，所以当 时，取最小值，且最小值为.

若,则，此时，在 上单调递减，在 上单调递增，不符合单峰函数的定义.

若,则，此时存在，使得，当 时，,，则，此时 单调递增，当 时，,，则，此时 单调递减，故满足单峰函数的定义，其中 是单峰区间，是峰点.故 的取值范围为.

16. 已知函数的图象在点处的切线与直线垂直.

（1）求的单调区间；

（2）若对任意实数，恒成立，求整数的最大值.

[解析]（1）由，得，又切线与直线 垂直，所以，即,

所以，令，得.

当 时，，单调递减；

当 时，，单调递增.

故 的单调递减区间为，单调递增区间为.

（2）对任意实数，恒成立，

即对任意实数,恒成立.

设，则.

，令，

所以 恒成立，所以 在 上单调递增.

又，，所以存在,，使得，即，所以.

当 时，，单调递减；当 时，，单调递增.

故，

当,时，，

所以,，由题意知 且,

所以，即整数 的最大值为1.